

法政大学学術機関リポジトリ  
HOSEI UNIVERSITY REPOSITORY

## 発散のないmodel の試作(7)

著者	古尾谷 泉
出版者	法政大学多摩研究報告編集委員会
雑誌名	法政大学多摩研究報告
巻	20
ページ	73-80
発行年	2005-03-30
URL	<a href="http://hdl.handle.net/10114/104">http://hdl.handle.net/10114/104</a>

## 発散のない model の試作 (VII)

古尾谷 泉

An attempt toward a non-divergent model (VII)

Izumi FURUOYA

これまで、場の理論における発散の問題に関して、発散のおきない独自の理論を展開してきたが、我々の理論<sup>1)</sup>から現象論面で一体何がいえるのか。この論文では、その一つの成果を紹介しよう。

素粒子の質量の階層性の問題は古くからの問題ではあるが、依然として謎のままである。素粒子の階層性とは up quark ( $u, c, t$ ), down quark ( $d, s, b$ ), lepton ( $e, \mu, \tau$ ) および lepton と対をなす neutrino ( $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ ) から構成される族

$$\begin{bmatrix} \nu_e \\ e \\ d \\ u \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \nu_\mu \\ \mu \\ s \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \nu_\tau \\ \tau \\ b \\ t \end{bmatrix}, \dots$$

が同じ pattern で繰り返されることをいう。Fig.3 から Fig.6 までは、up quark, down quark および lepton の質量の測定値 (neutrino は除いてある) を、generation に対して、semi-loge scale 上で plot して、それらを直線で結んだものである。lepton ではやや曲がるが quark では直線上に乗っているといつてよからう。これらの質量の値は Fusaoka and Koide の論文<sup>2)</sup>から引用した。

我々の model で、model space の曲率半径  $a$  が、なんらかの理由によって、複素数であると仮定する。すなわち、 $\alpha$  と  $\beta$  とを実定数として、 $a$  が

$$2/a = \alpha + i\beta \quad (1)$$

となると仮定する。このとき、我々の理論から素粒子の generation 間の質量に関する公式

$$\log M_{n+1} = \log M_n + (\alpha/\beta)\pi n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

が導出できる。Eq.(2)で、 $n$  を generation の番号とすれば、 $M_n$  は  $n$  th generation の素粒子の質量であり、また  $M_{n+1}$  は  $n+1$  th generation の対応する素粒子の質量である。いいかえると、

我々の公式 Eq.(2) は  $n$  th generation で質量  $M_n$  を持つ素粒子は  $n+1$  th generation では質量  $M_{n+1}$  を持つことを示している。すなわち、Eq.(2) は、素粒子の質量を log scale で表して、generation に対して plot すると直線上に乗る、ことをいっている。我々の理論では、素粒子の質量の起源の問題や、1 世代内での質量の splitting の問題（ある 1 つの粒子が何らかの理由によって、up quark, down quark と lepton とに splitting したと考えるのが自然であるとおもわれるが）についての答えは得られない。しかし、我々の理論で、素粒子が同じ pattern で繰り返しあらわれること、すなわち、generation の生成の説明、および前述の、第 0 近似で質量の観測値が直線的に増加することの説明に、半ば、成功したと言ってよかろう。

次に、我々の理論から我々の公式 Eq.(2) を導出しよう。まず重い核子が virtual な中間子（質量はゼロとする）を放出し、再び、それを吸収する場合を想定しよう。これを示したのが Fig.1 である。この図から、energy 保存則より

$$E_p = E_{p'} + E_k, \quad E_k = k_0^2 \quad (3)$$

であり、また momentum 保存則より

$$P = P' + k \quad (4)$$

である、ここで、これら 2 つの保存則は同時には成り立つことはないので  $(k_0, k)$  は 4-vector をなすが shell 上にはない。すなわち

$$-k_0^2 + k^2 \neq 0, \quad (5)$$

である。Fig.2 のように potential “ $V$ ” が存在すれば、energy 保存則と momentum 保存則は同時に成立し

$$“V” = -k_0^2 + k^2 \quad (6)$$

となる。

我々の model における相互作用は extended homogeneous Lorentz 変換  $(\Lambda^\lambda_\mu)$   $\lambda, \mu = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  の homogeneous Lorentz 変換  $(\Lambda^a_b)$   $a, b = 0, 1, 2, 3$  による剰余部分空間で定義される。すなわち、我々の理論における相互作用は

$$“V” = (\Lambda^\lambda_\mu) / (\Lambda^a_b), \quad (7)$$

で与えられる。これは conventional な理論における minimal な相互作用

$$P \rightarrow P + eA, \quad (8)$$

や、同じことだが momentum space における相互作用

$$p \rightarrow p + k, \quad (9)$$

を、我々の model における 電荷の普遍性の要請 を満たすように拡張したものである。

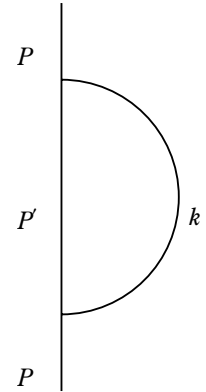


Fig.1

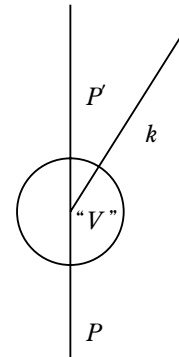


Fig.2

我々の相互作用“ $V$ ”は、我々の model space である 5 次元定曲率空間内の長さを変えない等長変換である。このことが我々の model space における電荷の普遍性を保証しているのである。しかし、4 次元部分空間内の長さは不変ではない。すなわち、 $E^2 - p^2$  は変換“ $V$ ”によって

$$E^2 - p^2 \rightarrow E^2 - p^2 + v, \quad (10)$$

とその長さが変わるが、この変化が我々の model space における相互作用なのである。

このようにして、我々の model space における 5 次元空間内の infinitesimal line element

$$ds^2 = d\xi^2 + e^{(-2\xi/a)}(-Q_0^2 + Q^2), \quad (11)$$

は相互作用“ $V$ ”によって不変である。Eq.(11)を書き直すと

$$1 = (d\xi/ds)^2 + e^{(-2\xi/a)}(-Q_0^2 + Q^2), \quad (12)$$

となる。ここで

$$Q_0 = dt/ds \quad \text{および} \quad Q = dx/ds, \quad (13)$$

であるが、 $Q_0$  は我々の model space における energy であり、また  $Q$  は momentum である。ここで、相互作用はきわめてゆっくと入ると仮定しよう。すなわち

$$d\xi/ds = 0, \quad (14)$$

と仮定しよう。この仮定のもとで、“ $V$ ”による  $(Q_0, Q)$  の excited state を  $(Q_0', Q')$  とかけば、Eq.(11)は“ $V$ ”で不変であるから

$$e^{(-2\xi/a)}(-Q_0^2 + Q^2) = e^{(-2\xi'/a)}(-Q_0'^2 + Q'^2), \quad (15)$$

となる。ここで  $(Q_0, Q)$  と  $(Q_0', Q')$  とは同時に静止系にとることができるから、 $Q_0$  と  $Q_0'$  との最小値を、それぞれ  $m$  および  $\mu$  とかけば

$$(Q_0, Q) = (m, 0) \quad \text{および} \quad (Q_0', Q') = (\mu, 0), \quad (16)$$

とおける。これを Eq.(15)に代入すると

$$m^2 e^{(-2\xi/a)} = \mu^2 e^{(-2\xi'/a)}, \quad (17)$$

となり、これより

$$(\mu/m)^2 = e^{(2\eta/a)} \quad \text{ここで} \quad \eta = \xi' - \xi, \quad (18)$$

をうる。

ここでもし我々の model space における曲率  $a$  が複素数であると仮定すると、 $\alpha$  と  $\beta$  とを実定数として

$$2/a = \alpha + i\beta, \quad (19)$$

とおける。このとき Eq.(18)は

$$(\mu/m)^2 = e^{a\eta} e^{i\beta\eta}, \quad (20)$$

となるが、 $m^2$  も  $\mu^2$  も共に real number であり、また正值なので Eq.(20)が成立するためには

$$e^{i\beta\eta} = 1, \quad (21)$$

でなければならない。これより

$$\beta\eta = 2\pi n, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (28)$$

すなわち

$$\eta = (2\pi/\beta)n, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (29)$$

をうる。これを Eq.(20) に代入すれば

$$(\mu/m)^2 = e^{(\alpha/\beta)2\pi n}, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (30)$$

となり、われわれの公式 Eq.(2) が得られる。

次に conventional な理論で、素粒子の質量はどのように決定されるのかをみよう。そしてそのことによって Eq.(2) の持つ意味を探ろう。以下の running quark mass の議論は Fusaoka and Koide の論文<sup>2)</sup> を参照した。

quark は lepton と違って hadron 内に confine されていて、直接観測にかかることはない。その結果、quark mass の値は、それらの定義や、それらを計算するのに用いた scheme 等によって異なる。quark の質量の定義にはいろいろあるが、ここでは、特に理由があるわけではないが、running quark mass の値を quark mass の値として採用した。running quark mass の値は 2 つの parameter、すなわち、scale parameter  $\mu$  と QCD の parameter  $\Lambda$  とに依存する。running quark mass を  $m_q(\mu)$ 、ここで  $q$  は flavor をあらわす、とかけば、 $m_q(\mu)$  の値は、次の renormalization group equation によって決定される。

$$\mu dm_q(\mu)/d\mu = -\gamma(\alpha_s)m_q(\mu), \quad (25)$$

ここで、 $\gamma$  は 3 つの loop まで考慮して

$$\gamma(\alpha_s) = \gamma_0(\alpha_s/\pi) + \gamma_1(\alpha_s/\pi)^2 + \gamma_2(\alpha_s/\pi)^3, \quad (26)$$

である。ここで  $\gamma_0$ ,  $\gamma_1$  および  $\gamma_2$  は  $q$  quark の flavor の数  $n_q$  に依存する定数である。

$\gamma_0 = 2$ ,  $\gamma_1 = 101/12 - 5/18n_q$  および

$$\gamma_2 = (1/32) \left( 1249 - (2216/27 + 160\zeta(3)/3)n_q - 140/81n_q^2 \right). \quad (27)$$

Eq.(25) の解は

$$m_q(\mu) = R(\alpha_s(\mu)) \widehat{m}_q, \quad (28)$$

であたえられる。ここで、 $\widehat{m}$  は renormalization invariant mass であって  $\log(\mu^2/\Lambda^2)$  には依存しない。 $R(\alpha_s(\mu))$  は

$$\begin{aligned} R(\alpha_s) = & (\beta_0\alpha_s/2\pi)^{2\gamma_0/\beta_0} \left( 1 + (2\gamma_1/\beta_0 - \beta_1\gamma_0/\beta_0^2) \right) (\alpha_s/\pi) \\ & + (1/2) \left[ (2\gamma_1/\beta_0 - \beta_1\gamma_0/\beta_0^2)^2 + 2\gamma_2/\beta_0 - \beta_1\gamma_1/\beta_0^2 - \beta_2\gamma_0/16\beta_0^2 + \beta_1^2\gamma_0/2\beta_0^3 \right] (\alpha_s/\pi)^2, \end{aligned} \quad (29)$$

であたえられる。 $\alpha_s(\mu)$  は effective QCD coupling であって、次の renormalization group equation によって決定される。

$$\mu \partial \alpha_s / \partial \mu = \beta(\alpha_s) \quad (30)$$

Eq.(30)における  $\beta$ -function は、3-loop まで考慮して

$$\beta(\alpha_s) = -\beta_0 \alpha_s^2 / 2\pi - \beta_1 \alpha_s^3 / 4\pi^2 - \beta_2 \alpha_s^4 / 64\pi^3, \quad (31)$$

であり、ここで、 $\beta_0$ ,  $\beta_1$  および  $\beta_2$  は  $n_q$  に依存する定数である。

$$\beta_0 = 11 - 2n_q/3, \quad \beta_1 = 51 - 19n_q/3, \quad \text{および} \quad \beta_2 = 2857 - 5033n_q/9 + 325n_q^2/27. \quad (32)$$

Eq.(30)の解は  $L = \log(\mu^2/\Lambda^2)$  として

$$\alpha_s(\mu) = (4\pi/\beta_0 L) \left[ 1 - 2\beta_1 \ln L / \beta_0^2 L + (4\beta_1^2 / \beta_0^4 L^2) \left( (\ln L - 1/2)^2 + \beta_2 \beta_0 / 8\beta_1^2 - 5/4 \right) \right], \quad (33)$$

であたえられる。 $\alpha_s(\mu)$  の値は  $n$  th quark の threshold  $\mu_n$  で不連続になる。それは  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  および  $\beta_2$  が  $n_q$  によって異なる値をとるからである。このことに対応して  $\Lambda$  も異なるが、それらを  $\Lambda^{(n)}$  とかくと  $\Lambda^{(n)}$  には  $n$  に関する漸化式ができています。

$$\Lambda_{MS}^{(5)} = 209 \text{ MeV}$$

から出発して

$$\mu_5 = m_b(m_b) = 4.339 \text{ GeV}, \quad \mu_4 = m_c(m_c) = 1.302 \text{ GeV} \quad \text{および} \quad \mu_6 = m_t(m_t) = 170.8 \text{ GeV}.$$

として  $\alpha_s^{(n)}(\mu)$  の値を求めたのが TABLE I である。

TABLE I

Values of $\Lambda \frac{(n)}{MS}$ in units of $GeV$ and $\alpha_s(\mu_n)$ . The underlined values are input values.			
$n$	$\Lambda \frac{(n)}{MS}$	$\alpha_s^{(n)}(\mu_n)$	$\mu_n$
3	$0.333 \pm_{-0.042}^{+0.047}$	$1.69 \pm_{-0.33}^{+0.38}$	$\mu_3 = 0.553 \text{ GeV}$
4	$0.291 \pm_{-0.041}^{+0.048}$	$0.379 \pm_{-0.039}^{+0.048}$	$\mu_4 = 1.302 \text{ GeV}$
5	<u><math>0.209 \pm_{-0.033}^{+0.039}</math></u>	$0.222 \pm_{-0.012}^{+0.013}$	$\mu_5 = 4.339 \text{ GeV}$
6	$0.0882 \pm_{-0.0159}^{+0.0191}$	$0.1078 \pm_{-0.0035}^{+0.0036}$	$\mu_6 = 170.8 \text{ GeV}$

(Fusaoka and Koide)

TABLE I の結果から計算された質量の値は TABLE II である。

TABLE II

Running quark masses  $m_q(\mu)$  and invariant masses  $\widehat{m}_q$  (in units of  $GeV$ ). The values with an asterisk should not be taken strictly because the perturbative calculation is not reliable in the region with a large  $\alpha_s(\mu)$ .

	$q = u$	$q = d$	$q = s$	$q = c$	$q = b$	$q = t$
$M_q^{pole}$	*0.501 + 0.068 - 0.061	*0.517 + 0.068 - 0.062	*0.687 + 0.074 - 0.067	1.59 $\pm 0.02$	4.89 $\pm 0.05$	180 $\pm 12$
$m_q(M_q^{pole})$	*0.0307 + 0.0022 - 0.0026	*0.0445 + 0.0018 - 0.0023	*0.283 + 0.013 - 0.016	1.213 + 0.052 - 0.058	4.248 + 0.082 - 0.056	170 $\pm 12$
$m_q(m_q)$	*0.436 + 0.059 - 0.054	*0.448 + 0.060 - 0.054	*0.553 + 0.064 - 0.057	1.302 + 0.037 - 0.038	4.339 + 0.073 - 0.076	171 $\pm 12$
$m_q(1GeV)$	0.00488 $\pm 0.00057$	0.00981 $\pm 0.00065$	0.1954 $\pm 0.0125$	1.506 + 0.048 - 0.037	7.18 + 0.59 - 0.44	475 + 86 - 71
$m_q(m_c)$ $m_c = 1.302$	0.00418 + 0.00056 - 0.00060	0.00840 + 0.00071 - 0.00077	0.1672 + 0.0137 - 0.0150	1.302 + 0.037 - 0.038	6.12 + 0.32 - 0.25	399 + 58 - 51
$m_q(m_b)$ $m_b = 4.339$	0.00317 + 0.00052 - 0.00056	0.00637 + 0.00073 - 0.00081	0.1268 + 0.0142 - 0.0159	0.949 + 0.063 - 0.070	4.34 + 0.07 - 0.08	272 + 26 - 25
$m_q(m_W)$ $m_W = 80.33$	0.00235 + 0.00042 - 0.00045	0.00473 + 0.00061 - 0.00067	0.0942 + 0.0119 - 0.0131	0.684 + 0.056 - 0.061	3.03 $\pm 0.11$	183 $\pm 13$
$m_q(m_Z)$ $m_Z = 91.187$	0.00233 + 0.00042 - 0.00045	0.00469 + 0.00060 - 0.00066	0.0934 + 0.0118 - 0.0130	0.677 + 0.056 - 0.061	3.00 $\pm 0.11$	181 $\pm 13$
$m_q(m_t)$ $m_t = 170.8$	0.00223 + 0.00040 - 0.00043	0.00449 + 0.00058 - 0.00064	0.0894 + 0.0114 - 0.0125	0.646 + 0.054 - 0.059	2.85 $\pm 0.11$	171 $\pm 12$
$m_q(A_W)$ $A_W = 174.1$	0.00223 + 0.00040 - 0.00043	0.00448 + 0.00058 - 0.00064	0.0893 + 0.0114 - 0.0125	0.645 + 0.054 - 0.059	2.84 $\pm 0.11$	171 $\pm 13$
$\widehat{m}_q$	0.00496 + 0.00095 - 0.00101	0.00998 + 0.00141 - 0.00153	0.199 + 0.028 - 0.030	1.59 + 0.15 - 0.16	7.87 + 0.40 - 0.41	546 $\pm 49$

(Fusaoka and Koide)

Fig.3 から Fig.6 は TABLE II から、 $\mu$  のいくつかの値を選んで図にしたものである。

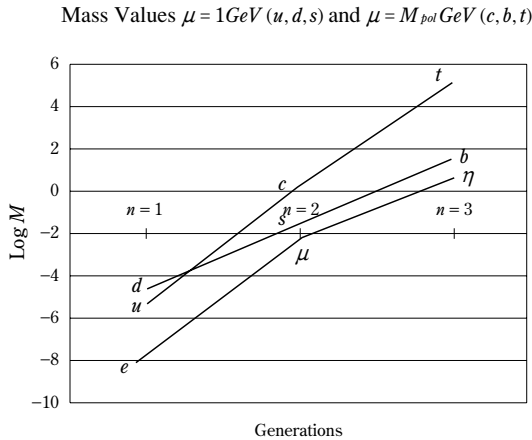


Fig.3

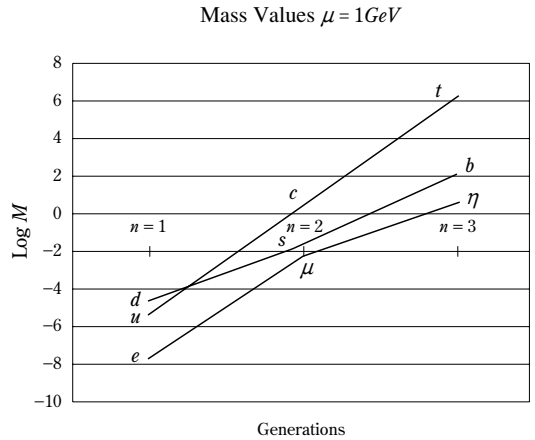


Fig.4

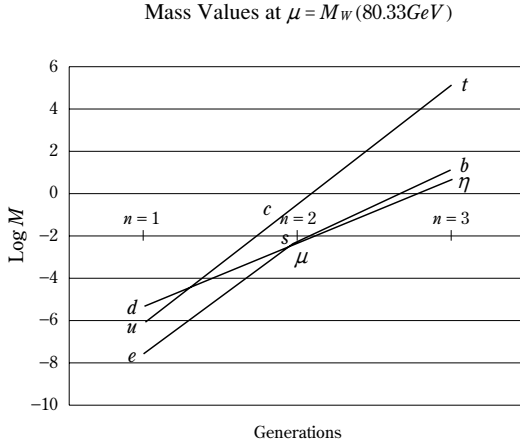


Fig.5

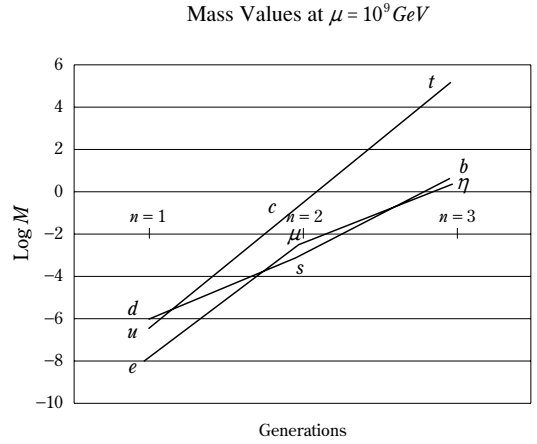


Fig.6

### 議 論

1) これらの図からいえることは、質量の対数値の generation に対する直線的増加傾向は、 $\mu$  の値の違いによってその傾きは僅かに変わるが、線形性は崩れない、とみなしてよからう。TABLE II にはデータは載ってないが、 $\mu = 10^9 \text{ GeV}$  においても、その線形性は保たれている (文献 (2) を参照)。我々の model では、各 generation 内における mass splitting や lepton における僅かな直線からのずれ等の fine structure は別として、この直線的増加傾向の説明に成功したと言ってよからう。

2) generation 間の対応する粒子の質量の測定値の比は、 $M_2/M_1 \sim M_3/M_2 \sim 20 \sim 200$  であるのに対して、質量の loop による補正は親の粒子の  $1/10 \sim 1$  程度である。このことから、generation 間の energy gap は、loop による量子効果、すなわち、virtual particle による dynamics とは、別の mechanism に依るものと考えられよう。

3) 我々の model space の curvature は complex number であると仮定した。このことは Kobayashi-Maskawa 行列の parity non-conservation を表す imaginary phase との関連性が予測される。標準模型では、各 generation 間はこの Kobayashi-Maskawa 行列のみによって関連づけられている。我々の model においても、curvature の imaginary part がなければ、隣の generation との関連性はなくなる。



## 参照文献

- 1) “発散のない model の試作” 古尾谷 泉 多摩研究報告 14;55-61 (1999)。同 15;65-71 (2000)。同 16;97-112 (2001)。同 17;1-11 (2002)。同 18;9-24 (2003)。同 19;69-93 (2004)。  
(訂正 上記論文中 “Van Hove の定理” に関わる個所は誤りである。)
- 2) H.Fusaoka and Y.Koide Phys. Rev. D57,3986 (1998)